MODUL 8

STATISTIKA DAN PROBABILITAS

8.1 MATERI KULIAH :

Pengertian umum distribusi normal.

8.2 POKOK BAHASAN :.

Pengertian tentang distribusi normal dan distribusi-t

Oleh Ir. Nunung Widyaningsih,Pg.Dip.(Eng)

8.3 DISTRIBUSI NORMAL

Distribusi Normal merupakan distribusi yang paling terkenal dan paling umum dipakai. Distribusi normal memiliki fungsi kerapatan probabilitas (probability density function=pdf), seperti terlihat pada gambar dibawah ini.

Parameter-parameter distribusi normal antara lain terdiri dari:

1. mean (nilai purata) atau μ dan varians (variance) σ^2 dimana (σ deviasi standard)
2. kurve pdf adalah mean simetris
3. area dibawah pdf besarnya adalah 1
4. maka dapat dituliskan sebagai berikut;

8.3.1. Cara perhitungan distribusi normal.

Ditentukan bahwa variabel X ada diantara a dan b, sehingga

$$\mathrm{Pr}(a \langle X \langle b) = \mathrm{Pr}(X \rangle a) - \mathrm{Pr}(X \rangle b)$$

Jika $X \approx \mathrm{Nor}(\mu, \sigma^2)$, dan membuat suatu variabel baru yaitu

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Dengan mean = 0 dan deviasi standar = 1 maka $Z \approx \mathrm{Nor}(0,1)$.

Distribusi ini disebut distribusi normal standar (standard normal distribution)

Maka dapat dituliskan kembali bahwa,

$$\Pr(X \rangle a) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \rangle \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Pr\left(Z \rangle \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\text{dimana} \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$X \approx \mathrm{Nor}\left(\mu, \sigma^2\right)$$

Z diikuti dengan a fungsi distribusi Nor(0,1), ditabulasikan secara luas sebagai Tabel dari probabilitas normal.

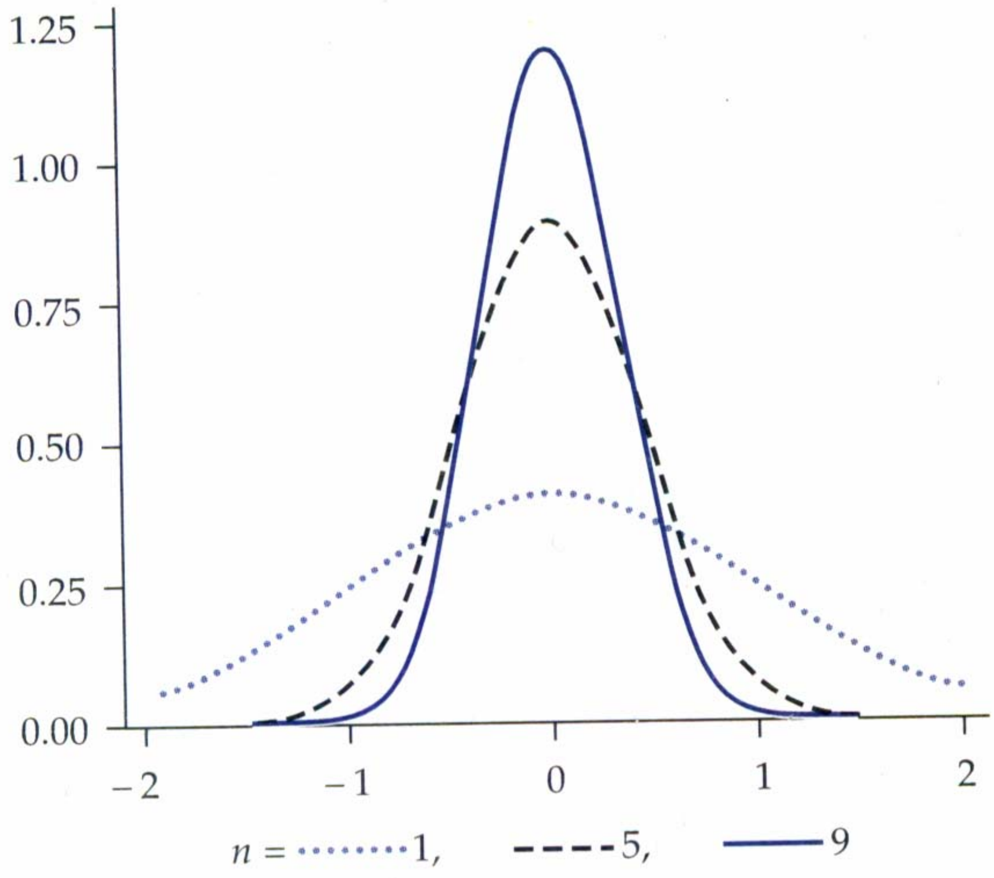

Figure 6.1 Probability density function of sample mean—standard normal parent ($n = 1, 5, 9$)

<u>8.3.2. Tabel dari distribusi normal standar (standard normal distribution).</u>

Contoh:

Pr(Z > 2.46) -----maka kita pilih kolom kiri 2.4 dan baris atas dengan 0.06. Maka hubungan kedua angka tadi didapat Pr(Z >2.46) = 0.00695

Contoh

Suatu study mengenai reaksi pengemudi diantara pengemudi melewati suatu tanda berbahaya dengan melakukan perpindahan jalur. Didapat reaksi tersebut menghasilkan suatu normal distribusi dengan mean (nilai rata-rata) 11 detik dan standard deviation (deviasi standar) 5 detik.

Ditanyakan:

a. Berapa proporsi bahwa pengemudi memiliki waktu reaksi lebih besar dari 15 detik.
b. Berapa proporsi bahwa pengemudi yang berpindah jalur sebelum mendekati tanda berbahaya.
c. Persentase pengemudi dengan waktu reaksi antara 10 sampai 15 detik
d. Jarak tengah simetris dari mean 11 detik dengan 90% waktu reaksi yang akan terjadi.

Jawab:

1. Diketahui bahwa X= waktu reaksi

Dan $X \approx \mathrm{Nor}(11,5^2)$

a. Maka besarnya proporsi waktu reaksi lebih besar dari 15 detik adalah:

$$\Pr(X \rangle 15) = \Pr\left(\frac{X-11}{5} \rangle \frac{15-11}{5}\right)$$
$$= \Pr(Z \rangle 0.8)$$

Dimana digunakan $Z \approx \mathrm{Nor}(0,1)$ (lihat keterangan pada 4.1)

Dari tabel didapat bahwa Pr(Z > 0.8) = 0.21186

Sehingga sekitar 21% dari pengemudi mempunyai waktu reaksi lebih besar dari 15 detik.

b. Jika pengemudi mengganti jalurnya sebelum melihat tanda berbahaya, kemudian reaksi waktunya akan menjadi negatif. Sehingga proporsi tersebut menjadi:

$$\Pr(X\langle 0) = \Pr\left(\frac{X-11}{5}\langle\frac{0-11}{5}\right) = \Pr(Z\langle -2.2)$$

dimana $Z \approx \mathrm{Nor}(0,1)$

Sehingga dapat dilihat dalam gambar distribusi normal bahwa:

Pr (Z < - 2.2) = Pr (Z > 2.2)

Dari tabel didapat bahwa:

Pr (Z > 2.2) = 0.01390

<u>Jadi hanya 1.39% bahwa pengemudi akan mengganti jalur sebelum melihat tanda berbahaya.</u>

c.

$$\Pr(10\langle X\langle 15) = \Pr(X\rangle 10) - \Pr(X\rangle 15)$$
$$\text{Dari 1 dapat dilihat bahwa } \Pr(X > 15) = 0.21186$$
$$\text{Maka } \Pr(X\rangle 10) = \Pr\left(\frac{X-11}{5}\rangle\frac{10-11}{5}\right) = \Pr(Z\rangle -0.2)$$

Dan Pr (Z > - 0.2) = 1 - Pr (Z > 0.2) = 1 - 0.42074 (dari tabel)

Sehingga probabilitasnya menjadi:

<u>Pr (10 < X < 15) = 1 - 0.42074 - 0.21186 = 0.3674.</u>

d. Kita akan mencoba mencari jarak waktu antara 11 - w ke 11 + w ; seperti misalnya:

$$\Pr\left(11-w\langle X\langle 11+w\right)=0.90$$

Dari gambar terlihat:

Pr (X > 11 + w) = 0.05
Dari tabel normal distribusi didapat bahwa (bila dihitung mundur):

Pr (Z > 1.64) = 0.05050
Pr (Z > 1.65) = 0.04947

Maka kita ambil diantaranya adalah:

Pr (Z > 1.645) = 0.05

Sehingga hubungannya dengan X dengan menghubungkan 1,645 dengan mean dan dibagi dengan deviasi standar maka:

$$1.645=\frac{(11+w)-11}{5}$$
$$w=8.225$$

8.4 DISTRIBUSI -T

a. Jika n ≥ 30, digunakan $\bar{x}$ sebagai Normal distribusi.

- Bila x adalah normal, maka $\bar{x}$ juga normal.
- Bila x tidak diketahui distribusinya, maka $\bar{x}$ mendekati normal.
- Bila σ tidak diketahui, gantilah σ dengan s.

b. Jika 15 ≤ n < 30, gunakan Normal atau distribusi-T, tergantung dari σ diketahui atau tidak.

- Bila x adalah Normal, maka $\bar{x}$ juga Normal jika σ diketahui, digunakan distribusi-T bila σ tidak diketahui.
- Bila x tidak diketahui distribusinya, maka $\bar{x}$ mendekati normal bila σ diketahui (dengan Central Limit Theorem= CLT), digunakan distribusi-T bila σ tidak diketahui (dengan CLT).

c. Jika n < 15 , jika x diketahui Normal, sifat-sifat sama pada b. yang berlaku.

Cara menggunakan Tabel distribusi-T.

Probabilitas (α) diperlihatkan pada baris atas, yang berisi: $\Pr(t \rangle t_\alpha) = \alpha$

Tiap baris dalam tabel - T berhubungan dengan perbedaan besarnya degrees of freedom (υ)

Contoh:

$\Pr(t \rangle c) = 0.025$

$\upsilon = 9$ degrees of freedom dari $c = 2.2622$

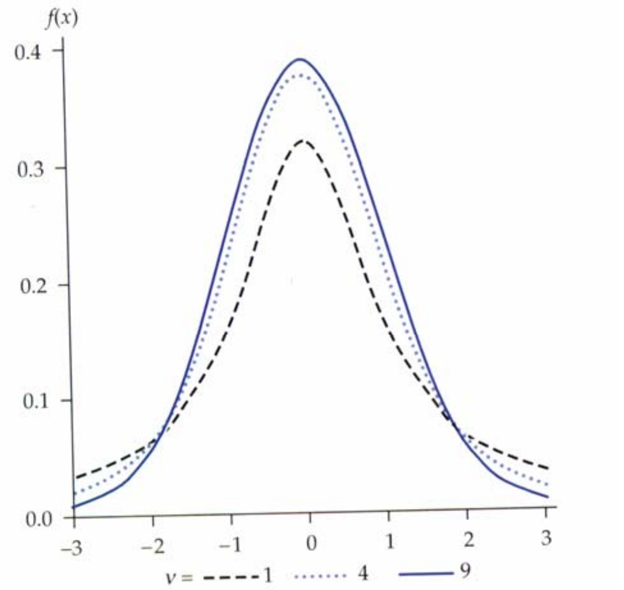

Figure 6.5 Probability density function of Student's t for $\nu = 1, 4, 9$

e.Bila x adalah Normal tetapi σ tidak diketahui dan n ≥ 30, maka distribusi $\bar{x}$:

Dapat dituliskan sbb:

Jika x ≈ $\mathrm{Nor}(\mu, \sigma^2)$ dimana σ tidak diketahui , maka digunakan:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \approx t(n-1) \ldots\ldots\ldots n \geq 30$$

f. Bila x tidak diketahui, σ tidak diketahui , 15 $\leq$ n < 30 maka distribusi $\bar{x}$:

maka digunakan:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \approx t(n-1)\ldots\ldots\ldots 15 \leq n < 30$$

Contoh:

Suatu survey diadakan pada tahun 1991 waktu pagi hari pada jam sibuk selama 16 hari dengan hasil sbb:

Hari	1	2	3	4	5	6	7	8
Flow (pcu/h)	949	812	1002	846	774	1121	823	855
Hari	9	10	11	12	13	14	15	16
Flow (pcu/h)	921	741	961	1021	811	1283	991	892

Tentukan jumlah lalu lintas rata-rata (mean) pada jam tersebut beserta perhitungan confidence yang anda ambil.

Penyelesaian:

x = arus lalu lintas pada th 1991 pada waktu pagi hari pada jam sibuk.

setelah dihitung didapat:

$\bar{x}$ = 925.2

s = 139.77

n = sampel size = 16

Maka diambil = $\hat{\mu}$ = $\bar{x}$ = 925

Jika dipakai 95% confidence interval diantara: $(\mu - w, \mu + w)$

Maka:

$$\Pr\left(\bar{x} \rangle \mu + w\right) = 0.025$$

Kemudian

$$\Pr\left(\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \rangle \frac{w}{s/\sqrt{n}}\right) = 0.025$$

sehingga

$$\Pr\left(t(n-1) \rangle \frac{w}{s/\sqrt{n}}\right) = 0.025$$

Dari tabel distribusi-T didapat υ =16-1 = 15 degrees of fredom, kita dapatkan:

$$\Pr(t(15) \rangle 2.1314) = 0.025$$

$$\frac{w}{s/\sqrt{n}} = 2.1314$$

$$w = 74.5$$

<u>Jadi 95% confidence interval dari μ adalah:</u>

$925 \pm 74.5 \quad 851\,\text{ke}\,1000$