# Penggunaan Distribusi Poisson Untuk Menghitung Peluang Memenangkan Suatu Permainan


### Intisari

*Dalam tulisan ini kami akan membahas penerapan teorema karakterisasi yang erat kaitannya dengan distribusi Poisson pada beberapa data sepakbola dan baseball. Peluang $P(\lambda)$ suatu tim dengan skor rata-rata $\lambda$ mengalahkan tim lainnya $Q(\mu)$ yang memiliki skor rata-rata $\mu$ dihitung ketika skor masing-masing tim berdistribusi Poisson. Teorema karakterisasi menyatakan jika persamaan $\frac{d}{d\lambda}\mathrm{P}[P(\lambda) > Q] = \mathrm{P}[P(\lambda) = Q]$ berlaku untuk setiap distribusi skor dari tim dengan rata-rata $\mu$ maka skor tim dengan rata-rata $\lambda$ berdistribusi Poisson.*

### Abstract

*In this paper we discuss the application of the characterization theorem, which has close relation with Poisson distribution, to some soccer and baseball data. The probability $P(\lambda)$ that a team with mean score $\lambda$ beats a team $Q(\mu)$ with mean score $\mu$ is calculated when the score of each team is Poisson distributed. The characterization theorem states if $\frac{d}{d\lambda}\mathrm{P}[P(\lambda) > Q] = \mathrm{P}[P(\lambda) = Q]$ holds for any score distribution of the team with mean $\mu$, then the score of the team with mean $\lambda$ must be Poisson distributed.*


## I Pendahuluan

Andaikan $P$ dan $Q$ bermain pada suatu permainan. Skor $P$ dan $Q$ saling bebas. $P$ memperoleh skor $n$ dengan peluang $p_n$. $Q$ memperoleh skor $m$ dengan peluang $q_m$. Jika lawan dengan skor tertinggi menang dan $p_n$ berdistribusi Poisson, dengan rata-rata $\lambda$, maka

$$p_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \tag{1.1}$$

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap distribusi $q_n$,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathrm{P}[P \text{ menang}] = \mathrm{P}[P \text{ dan } Q \text{ seri}] \tag{1.2}$$

Persamaan (1.2) benar jika $p_n$ diberikan oleh (1.1) sehingga (1.2) memberikan suatu karakterisasi baru dari distribusi Poisson. Jika $Q$ juga berdistribusi Poisson, dengan rata-rata $\mu$, maka peluang pada (1.2) dapat dievaluasi secara eksplisit dan (1.2) dapat dibuktikan secara langsung.

## II Teorema Karakterisasi

Teorema :

Jika $P(\lambda)$ suatu peubah acak berdistribusi Poisson dengan rata-rata $\lambda \geq 0$ dan $Q$ peubah acak bernilai bilangan bulat nonnegatif yang saling bebas dengan $P(\lambda)$ maka berlaku

$$\frac{d}{d\lambda}\ \mathrm{P}[P(\lambda) > Q] = \mathrm{P}[P(\lambda) = Q] \qquad (2.1)$$

Sebaliknya, misalkan $P(\lambda)$ peubah acak bernilai bilangan bulat nonnegatif yang memiliki rata-rata $\lambda \geq 0$ dengan $p_n(\lambda)$ = P[$P(\lambda)$ = $n$] yang dapat diturunkan terhadap $\lambda$, dan $Q$ adalah peubah acak bernilai bilangan bulat nonnegatif yang saling bebas dengan $P(\lambda)$. Jika **(2.1)** dipenuhi untuk semua peubah acak $Q$ maka $P(\lambda)$ berdistribusi Poisson.

*Bukti* :
Jika $P(\lambda)$ berdistribusi Poisson dengan $p_n(\lambda)$ = P[$P(\lambda)$ = $n$] diberikan oleh (1.1), dan $q_m$ = P($Q$ = $m$) maka ruas kanan dari (2.1) ialah :

$$\mathrm{P}[P(\lambda) = Q] = \sum_{m=0}^{\infty} q_m \ \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad (2.2)$$

dan ruas kiri dari **(2.1)** ialah :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}\mathrm{P}[P(\lambda) > Q] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} q_m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} p_n(\lambda) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} q_m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} q_m \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-\lambda}\left(\frac{n\lambda^{n-1}}{n!} - \frac{\lambda^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Untuk memperoleh bentuk terakhir dari **(2.3)**, gunakan kenyataan bahwa penjumlahan terhadap $n$ akan divergen. Karena ruas kanan dari **(2.2)** dan **(2.3)** identik, maka **(2.1)** terbukti.

Untuk membuktikan sebaliknya, mula-mula kita mulai dengan :
P[$P(\lambda) > Q$] = 1 - P[$P(\lambda) \leq Q$].
Dengan demikian, **(2.1)** dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}P[P(\lambda) > Q] \\
&= \frac{d}{d\lambda}\{1 - P[P(\lambda) \leq Q]\} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\ [1 - \sum_{m=0}^{\infty} q_m \sum_{n=0}^{m} p_n(\lambda)] \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty} q_m \ \sum_{n=0}^{m} p_n^{'}(\lambda) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} q_m \ p_m(\lambda) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Persamaan **(2.4)** memberikan

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m \ \sum_{n=0}^{m} p_n^{'}(\lambda) \ = \ -\sum_{m=0}^{\infty} q_m \ p_m(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&q_0 \ p_0^{'}(\lambda) + q_1[p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda)] + \ldots \\
&+ q_m[p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda) + \ldots + p_m^{'}(\lambda)] + \ldots \\
&= -q_0 \ p_0(\lambda) - q_1 \ p_1(\lambda) - \ldots \\
&-q_m \ p_m(\lambda) - \ldots
\end{aligned}$$

maka :

$$\begin{aligned}
&q_0 \ p_0^{'}(\lambda) = -q_0 \ p_0(\lambda) \\
&q_1[p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda)] = -q_1 \ p_1(\lambda) \\
&\qquad\vdots \\
&q_m[p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda) + \ldots + p_m^{'}(\lambda)] \\
&= -q_m \ p_m(\lambda) \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

diperoleh :

$$\begin{aligned}
&p_0^{'}(\lambda) = -p_0(\lambda) \\
&p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda) = -p_1(\lambda) \\
&\qquad\vdots \\
&p_0^{'}(\lambda) + \ldots + p_m^{'}(\lambda) = -p_m(\lambda) \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\sum_{n=0}^{m} p_n'(\lambda) = -p_m(\lambda) \qquad (2.5)$$

Jika $m = 0$ maka :

$$p_0'(\lambda) = -p_0(\lambda) \qquad (2.6)$$

Dengan menggunakan Prinsip Induksi Matematika (PIM) dan berdasarkan pada persamaan **(2.5)** dan **(2.6)**, akan dibuktikan

$p_m'(\lambda) = -p_m(\lambda) + p_{m-1}(\lambda)$

$\forall\ m = 1, 2, \ldots$ ......**(•)**

1. Persamaan **(2.6)** memberikan : $p_0'(\lambda) = -p_0(\lambda)$

   Dari persamaan **(2.5)** untuk $m = 1$ diperoleh :

   $p_0'(\lambda) + p_1'(\lambda) = -p_1(\lambda)$

   $p_1'(\lambda) = -p_1(\lambda) - p_0'(\lambda)$

   Substitusikan $p_0'(\lambda) = -p_0(\lambda)$ diperoleh :

   $p_1'(\lambda) = -p_1(\lambda) - [-p_0(\lambda)]$

   $= -p_1(\lambda) + p_0(\lambda)$

   Jadi, pernyataan **(•)** benar untuk $m = 1$.

2. Misalkan pernyataan **(•)** benar untuk $m = k$,

   maka $p_k'(\lambda) = -p_k(\lambda) + p_{k-1}(\lambda)$.

   Akan dibuktikan untuk $m = k + 1$ berlaku : $p_{k+1}'(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda) + p_k(\lambda)$

   *Perhatikan* : $p_k'(\lambda) = -p_k(\lambda) + p_{k-1}(\lambda)$

   *Karena* $p_0'(\lambda) + p_1'(\lambda) + \ldots + p_k'(\lambda) = -p_k(\lambda)$ *maka* :

   $p_k'(\lambda) = [p_0'(\lambda) + p_1'(\lambda) + \ldots + p_k'(\lambda)] + p_{k-1}(\lambda)$

   *Kemudian kedua ruas ditambahkan* $p_{k+1}'(\lambda)$ *diperoleh* :

   $p_k'(\lambda) + p_{k+1}'(\lambda) = [p_0'(\lambda) + p_1'(\lambda) + \ldots + p_k'(\lambda)] + p_{k-1}(\lambda) + p_{k+1}'(\lambda)$

   $p_k'(\lambda) + p_{k+1}'(\lambda) = [p_0'(\lambda) + p_1'(\lambda) + \ldots + p_k'(\lambda) + p_{k+1}'(\lambda)] + p_{k-1}(\lambda)$

   *Karena* $p_0'(\lambda) + p_1'(\lambda) + \ldots + p_k'(\lambda) + p_{k+1}'(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda)$ *maka* :

   $p_k'(\lambda) + p_{k+1}'(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda) + p_{k-1}(\lambda)$

   $p_{k+1}'(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda) + [p_{k-1}(\lambda) - p_k'(\lambda)]$

   *Karena* $p_{k-1}(\lambda) - p_k'(\lambda) = p_k(\lambda)$ *maka* :

   $p_{k+1}'(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda) + p_k(\lambda)$

   Jadi, terbukti bahwa $p_m'(\lambda) = -p_m(\lambda) + p_{m-1}(\lambda) \quad \forall\ m = 1, 2, \ldots$ .........................(2.7)

Persamaan **(2.6)** dan **(2.7)** merupakan persamaan diferensial biasa linear. Karena $\lambda$ ialah rata-rata dari $P(\lambda)$ maka $E(m) = \mu = \sum_{m=0}^{\infty} mp_m(\lambda) = \lambda$, sehingga pada $\lambda = 0$ diperoleh :

$$E(m) = \sum_{m=0}^{\infty} mp_m(0)$$
$$= 0p_0(0) + 1p_1(0) + 2p_2(0) + 3p_3(0) + ... = 0 \qquad \textbf{(*)}$$

**dan**

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(0) = p_0(0) + p_1(0) + p_2(0) + p_3(0) + ... = 1 \qquad \textbf{(**)}$$

Solusi dari kedua persamaan **(*)** dan **(* *)** di atas adalah

$p_0(0) = 1$ dan $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = \ldots = 0$.
Jadi, $p_0(0) = 1$ ; $p_m(0) = 0$ $\forall\ m = 1, 2, 3, \ldots$ ...(2.8)

Dengan syarat awal pada **(2.8)**, persamaan **(2.6)** dan **(2.7)** mempunyai solusi unik, dan dapat dibuktikan bahwa distribusi Poisson **(1.1)** adalah solusinya. Ini menyempurnakan bukti dari teorema karakterisasi.

Karena persamaan **(2.1)** dipenuhi, maka $P(\lambda)$ berdistribusi Poisson. Kemudian ruas kiri dan ruas kanan dari **(2.1)** diintegralkan terhadap $\lambda$ dengan batas bawah $\lambda = 0$.

$$\mathrm{P}[P(\lambda) > Q] = \int_0^{\lambda} \mathrm{P}[P(\lambda') = Q]\, d\lambda' \quad .(2.9)$$

Hubungan ini berguna jika nilai integral dapat ditentukan dengan mudah.

## III Skor Berdistribusi Poisson

Jika diasumsikan $Q(\mu)$ juga berdistribusi Poisson dengan rata-rata $\mu \geq 0$ maka

$$\mathrm{P}[P(\lambda) = Q(\mu)]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^n}{(n!)^2}$$
$$= e^{-\lambda-\mu}\ I_0(2\sqrt{\lambda\mu}) \quad .....(3.1)$$

Disini $I_0$ ialah fungsi Bessel yang dimodifikasi berderajat nol. Persamaan **(2.9)** memberikan

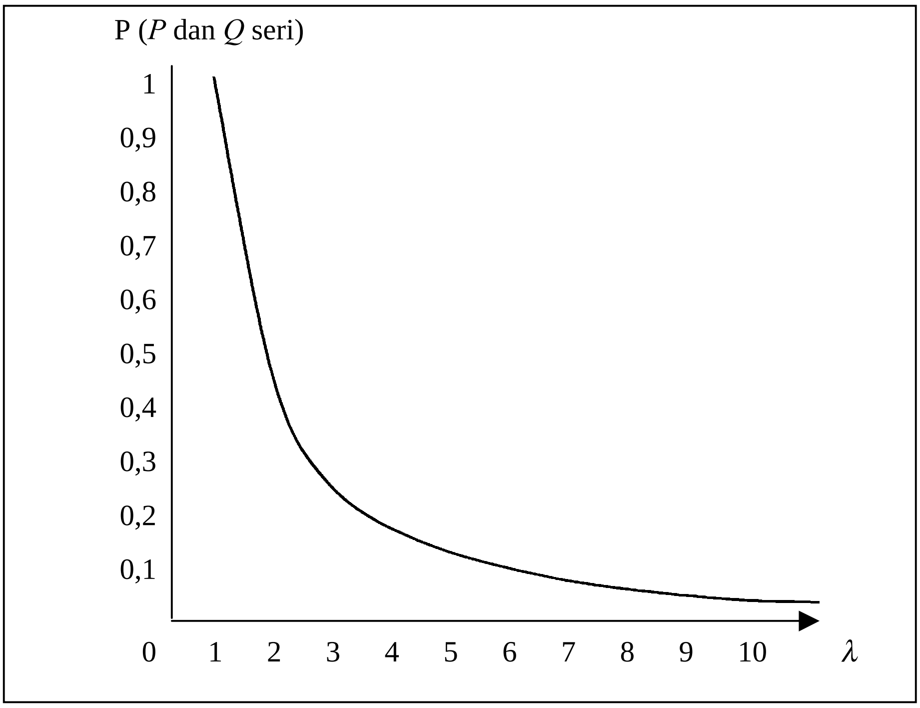
$$\mathrm{P}[P(\lambda) > Q(\mu)]$$
$$= \int_0^{\lambda} \mathrm{P}[P(\lambda') = Q(\mu)]\, d\lambda'$$
$$= \int_0^{\lambda} e^{-\lambda'-\mu}\ I_0[2\sqrt{\lambda'\mu}]\, d\lambda'$$
$$= e^{-\mu}\int_0^{\lambda} e^{-\lambda'} I_0[2\sqrt{\lambda'\mu}]\ d\lambda' \quad .....\textbf{(3.2)}$$

Persamaan **(3.2)** juga dapat diturunkan dari **(2.9)** secara langsung dengan memperhatikan ruas kiri, yang dapat dinyatakan sebagai penjumlahan ganda.

Jadi, jika skor $P$ dan $Q$ berdistribusi Poisson dengan $P(\lambda)$ dan $Q(\mu)$, maka **(3.2)** adalah peluang $P$ menang dan **(3.1)** adalah peluang $P$ dan $Q$ seri. Untuk pertandingan yang seimbang, dengan $\mu = \lambda$, persamaan **(3.1)** menjadi

$$\mathrm{P}[P \text{ dan } Q \text{ seri}] = e^{-2\lambda} I_0(2\lambda) \quad .....(3.3)$$

Fungsi ini seperti ditunjukkan pada Gambar **1**, monoton turun dari satu untuk $\lambda = 0$ dan menuju ke nol untuk $\lambda$ menuju $+\infty$. Untuk $\lambda$ besar, fungsi ini konvergen secara asimtotik ke $\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}}$.




**Gambar 1** Peluang seri jika skor kedua lawan berdistribusi Poisson dengan rata-rata sama, $\lambda$, dihitung dari **(3.3)**

Gambar **1** menunjukkan bahwa peluang seri lebih mungkin terjadi antara lawan dengan skor rendah daripada antara lawan dengan skor tinggi.

Dari kenyataan bahwa P[$P(\lambda) > Q(\lambda)$] = P[$Q(\lambda) > P(\lambda)$] = $\frac{1}{2}$\{1 - P[$P(\lambda) = Q(\lambda)$]\}, diperoleh

$$\text{P}[P \text{ menang}] = \frac{1}{2}\left[1-e^{-2\lambda} I_0(2\lambda)\right] \quad ....\textbf{(3.4)}$$

Untuk $\lambda$ besar, fungsi ini konvergen secara asimtotik ke $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4\pi\lambda}}$.

## IV Penerapan ke Data Sepakbola

Dalam tabel **1** ditunjukkan hasil-hasil permainan sepakbola yang dimainkan di Liga Sepakbola Internasional dari tahun 1996 sampai tahun 2001 (data diambil dari Lembaran Khusus Olahraga Pikiran Rakyat, Gelora). Untuk masing-masing pasangan tim, tabel **1** menunjukkan jumlah permainan antara satu tim melawan tim lainnya, jumlah keseluruhan gol yang dicetak, jumlah permainan yang dimenangkan masing-masing tim, dan jumlah seri dari keseluruhan permainan tersebut. Hasil bagi gol-gol tiap permainan ialah rata-rata jumlah gol tiap permainan yang dicetak oleh masing-masing tim melawan tim lainnya.

Misalkan jumlah gol yang dicetak oleh masing-masing tim berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda$ yang bergantung kepada tim lawan. Sebagai contoh, pada permainan antara Juventus dan AS Roma ada parameter $\lambda$ untuk Juventus dan parameter $\mu$ untuk AS Roma. Untuk menaksir parameter-parameter ini digunakan *maximum likelihood method*.

Statistik penaksir dari $\lambda$ dan $\mu$ ialah :

$$L(\lambda,\mu) = \prod_{i=1}^{N} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n_i}}{n_i!}\,\frac{e^{-\mu}\mu^{m_i}}{m_i!}$$

$$= \left(e^{-N\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{N} n_i}\right)\left(e^{-N\mu}\mu^{\sum_{i=1}^{N} m_i}\right)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i!\,m_i!}$$

$$= \left(e^{-N\lambda}\lambda^{S_1}\right)\left(e^{-N\mu}\mu^{S_2}\right)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i!\,m_i!} \quad ....(4.1)$$

Disini $N$ = 11 ialah jumlah permainan, $S_1$ = 15 ialah jumlah keseluruhan gol yang dicetak oleh Juventus, dan $S_2$ = 10 ialah jumlah keseluruhan gol yang dicetak oleh AS Roma.

Dari persamaan **(4.1)**

$$\ln L(\lambda, \mu) = -N\lambda + S_1 \ln \lambda - N\mu + S_2 \ln \mu - \sum_{i=1}^{N} \ln n_i - \sum_{i=1}^{N} \ln m_i \quad \ldots\ldots\ldots(4.2)$$

Dengan menurunkan $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}$ dan $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}$ sama dengan nol, dan mencari penyelesaian untuk $\lambda$ dan $\mu$, diperoleh taksiran *maximum likelihood*

$$\hat{\lambda} = \frac{S_1}{N} \text{ dan } \hat{\mu} = \frac{S_2}{N} \quad \ldots\ldots\ldots(4.3)$$

Taksiran-taksiran ini ditunjukkan dalam kolom tabel **1** berjudul "Gol tiap permainan". Jadi, untuk Juventus melawan AS Roma,

$$\hat{\lambda} = \frac{15}{11} = 1{,}364 \text{ dan } \hat{\mu} = \frac{10}{11} = 0{,}909 .$$

Sekarang, nilai $\hat{\lambda}$ dan $\hat{\mu}$ digunakan pada persamaan **(3.1)** untuk menaksir peluang seri dan **(3.2)** untuk menaksir peluang suatu tim dengan parameter $\lambda$ mengalahkan tim dengan parameter $\mu$. Taksiran peluang-peluang tersebut ditunjukkan dalam kolom tabel **1** berjudul "Peluang (berdasarkan teorema Karakterisasi)".

Dengan menggunakan perangkat lunak *Maple V Release 5* dapat dihitung peluang menang, peluang kalah, dan peluang seri masing-masing tim. Pada permainan antara Juventus melawan AS Roma, peluangnya adalah 0,4738 untuk kemenangan Juventus; 0,2500 untuk kemenangan AS Roma; dan 0,2762 bahwa kedua tim ini seri.

Mengalikan masing-masing peluang dengan jumlah permainan memberikan nilai ditunjukkan dalam kolom "Menang dan seri yang diharapkan". Maka, jumlah menang yang diharapkan untuk Juventus melawan AS Roma ialah (0,4738)11 = 5,2; AS Roma menang atas Juventus ialah (0,2500)11 = 2,8; dan seri ialah (0,2762)11 = 3,0. Kolom berikutnya menunjukkan jumlah "Menang dan seri yang sebenarnya", dan perbedaan "Kekurangan sebenarnya yang diharapkan" ditunjukkan dalam kolom kedua dari belakang pada tabel **1**.

Jika $p$ ialah peluang seri maka peluang $k$ seri dalam $N$ permainan diberikan oleh distribusi binomial $\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$.

Jumlah seri yang diharapkan ialah $pN$, dan simpangan baku ialah $\sqrt{p(1-p)N}$, yang ditunjukkan pada kolom terakhir. Jumlah menang yang diharapkan dan simpangan baku untuk tim-tim lainnya dihitung dengan cara yang sama, menggunakan peluang yang tepat.

Sekarang akan dibandingkan dua kolom terakhir, yaitu penyimpangan yang sebenarnya dengan simpangan bakunya. Empat belas dari 18 kasus, nilai mutlak penyimpangan sebenarnya lebih kecil daripada simpangan bakunya dan dalam empat kasus nilai mutlak penyimpangan sebenarnya lebih kecil daripada 2 kali simpangan bakunya. Hal ini menunjukkan bahwa model sesuai dengan data yang diberikan.

## V Penerapan ke Data *Baseball*

Dalam tahun 1994, San Fransisco Giants dari Perhimpunan *Baseball* Nasional bermain 12 permainan melawan Florida Marlins dan melawan St. Louis Cardinals. Jumlah *runs* yang dicetak oleh masing-masing tim dalam permainan tersebut ditunjukkan pada tabel **2**, berdasarkan data yang diberikan oleh San Fransisco Giants.

Tabel **2** juga menunjukkan $\hat{\lambda}$, taksiran *maximum likelihood* dari parameter diasumsikan berdistribusi Poisson untuk masing-masing tim. Taksiran $\hat{\lambda}$ ialah rata-rata jumlah *runs* tiap permainan.

Untuk menguji kebenaran distribusi Poisson, kita gunakan uji statistik

$$T = \frac{1}{\hat{\lambda}} \sum_{i=1}^{12} (r_i - \hat{\lambda})^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5.1)$$

Disini $r_i$ menyatakan jumlah *runs* yang dicetak oleh satu tim, katakanlah Giants, pada permainan ke-*i*. Menurut Cox dan Hinkley yang mengusulkan statistik ini, berdistribusi asimtotik untuk sampel besar ialah distribusi $\chi^2$ dengan derajat kebebasan 11. Nilai $T$ untuk masing-masing tim dalam tiap set permainan ditunjukkan dalam tabel **2**. Dengan derajat kebebasan 11, $\chi^2$ mempunyai nilai 19,68 untuk $P$ = 0,05 dan 22,62 untuk $P$ = 0,02. Maka dalam tiga dari empat kasus distribusi Poisson dapat diterima pada tingkat 0,05 sedangkan dalam kasus keempat distribusi Poisson dapat diterima pada tingkat 0,02.

Permainan pertama antara San Fransisco Giants dan Florida Marlins seri dengan skor 3-3 pada akhir babak sembilan, dan San Fransisco Giants menang dengan skor 4-3 pada babak ke sebelas. Kita telah menggunakan hasil pada akhir babak sembilan untuk membuat seluruh permainan seimbang dan memperbolehkan kemungkinan seri.

Untuk San Fransisco Giants melawan Florida Marlins, taksiran $\hat{\lambda} = \frac{56}{12} = 4,667$ dan $\hat{\mu} = \frac{48}{12} = 4,000$.

Dengan menggunakan perangkat lunak *Maple V Release 5* dapat dihitung peluang menang, peluang kalah, dan peluang seri masing-masing tim.

Pada permainan antara San Fransisco Giants melawan Florida Marlins, peluangnya adalah 0,5212 untuk kemenangan San Fransisco Giants; 0,3445 untuk kemenangan Florida Marlins; dan 0,1343 bahwa kedua tim ini seri.

Kita telah menghitung peluang menang untuk masing-masing tim, dan peluang seri, dari persamaan **(3.1)** dan **(3.2)** menggunakan nilai $\hat{\lambda}$ pada tabel **2**. Hasilnya, bersama dengan jumlah menang dan seri yang diharapkan dan yang sebenarnya, ditunjukkan pada tabel **3**.

San Fransisco Giants juga bermain melawan tim lainnya pada tahun 1994, dan ditunjukkan hitungan-hitungan yang mirip untuk beberapa set dari permainan tersebut. Nilai dari uji statistik $T$ adalah terlalu besar bagi distribusi Poisson untuk dapat diterima, menunjukkan penghamburan. Bagaimanapun juga, dalam kasus San Fransisco Giants melawan Florida Marlins, kita menghitung jumlah menang dan seri yang diharapkan, dengan mengasumsikan distribusi Poisson, dan mereka dalam satu simpangan baku dari nilai sebenarnya.

## VI Kesimpulan

Andaikan $P(\lambda)$ dan $Q$ bermain pada suatu permainan. Jika $P(\lambda)$ suatu peubah acak berdistribusi Poisson dengan rata-rata $\lambda \geq 0$

$$p_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \textbf{(6.1)}$$

dan $Q$ peubah acak bernilai bilangan bulat nonnegatif yang saling bebas dengan $P(\lambda)$ maka berlaku

$$\frac{d}{d\lambda} \mathrm{P}[P(\lambda) > Q] = \mathrm{P}[P(\lambda) = Q] \ldots \textbf{(6.2)}$$

Persamaan **(6.2)** benar jika $p_n$ diberikan oleh **(6.1)** sehingga **(6.2)** memberikan suatu karakterisasi baru dari distribusi Poisson. Jika $Q$ juga berdistribusi Poisson, dengan rata-rata $\mu$, maka peluang pada **(6.2)** dapat dievaluasi secara eksplisit dan **(6.2)** dapat dibuktikan secara langsung. Persamaan **(6.2)** tidak berlaku jika kedua peubah acak $P$ dan $Q$ tidak berdistribusi Poisson.

Sebaliknya, misalkan $P(\lambda)$ peubah acak bernilai bilangan bulat nonnegatif mempunyai rata-rata $\lambda \geq 0$ dengan $p_n(\lambda)$ = P[$P(\lambda)$ = $n$] yang dapat diturunkan terhadap $\lambda$ dan $Q$ peubah acak bernilai bilangan bulat nonnegatif yang saling bebas dengan $P(\lambda)$. Jika **(6.2)** dipenuhi untuk semua peubah acak $Q$ maka $P(\lambda)$ berdistribusi Poisson.

Persamaan **(6.2)** di atas disebut teorema karakterisasi yang erat kaitannya dengan distribusi Poisson untuk menghitung peluang memenangkan suatu permainan. Distribusi Poisson terbukti sesuai dengan beberapa data *baseball*, dan juga dapat diterapkan pada beberapa data sepakbola. Selain itu, teorema karakterisasi ini juga dapat diterapkan pada data bola basket dan data-data lainnya yang memenuhi teorema karakterisasi.

## Pustaka


1. Abramowitz, M. dan Stegun, I. A. 1965. *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover
2. Keller, B. J. *A Characterization of the Poisson Distribution and the Probability of Winning a Game*. The American Statistician, Vol. 48, No. 4, November 1994, pp. 294-298.
3. Kreyszig, E. 1988. *Advanced Engineering Mathematics*, 6th ed. New York : John Wiley & Sons.


## Penulis


Tanaka adalah mahasiswa Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Katolik Parahyangan.